

Paper Type: Original Article

## Fair Allocation of Fixed Cost in One-and Two-Stage Systems

### Using Data Envelopment Analysis

Faranak Hosseinzade Saljooghi<sup>1,\*</sup> , Ali Reza Pishgouy<sup>1</sup>, Farhad Hamidi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department Mathematics-Statistics and Computer, Faculty of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran; saljooghi@math.usb.ac.ir; Ali.pishgooy@gmail.com; F\_hamidi@math.usb.ac.ir.

#### Citation:



Hosseinzade Saljooghi, F., Pishgouy, A. R., & Hamidi, F. (2024). Fair allocation of fixed cost in one- and two-stage systems using data envelopment analysis. *Innovation management and operational strategies*, 5(3), 348–367.

Received: 18/04/2024

Reviewed: 12/05/2024

Revised: 14/06/2024

Accepted: 23/08/2024

## Abstract

**Purpose:** The fair allocation and distribution of fixed costs in a set of competitive entities is one of the most important management issues. Fair cost allocation between stages is of particular importance.

**Methodology:** Data envelopment analysis plays an important role in evaluating and comparing between units, efficiency and fixed cost allocation between different units. In cost allocation, in addition to the approach of maintaining and increasing efficiency, attention should also be paid to the competitive conditions and cooperation. Since cross-efficiency in data envelopment analysis handles these conditions of competition and cooperation between units well.

**Findings:** In this article, using the improved cross-efficiency and the proposed algorithm, we allocate a unique fixed cost to the units under evaluation in single-stage and two-stage supply chain systems fairly. This method does not have the complexity of calculations of previous methods.

**Originality/Value:** The results of the proposed method have been analyzed on real data, 29 branches of Iranian banks in a one-stage. Cost allocation is obtained uniquely. Then, to generalize the model in a two-stage mode, the data of 24 insurance companies with input, intermediate and output indicators have been used.

**Keywords:** Fixed cost allocation, Two-stage system, Improved cross efficiency.

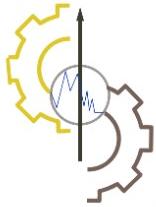


Corresponding Author: saljooghi@math.usb.ac.ir



doi: 10.22105/imos.2024.453236.1350

Licensee. **Innovation Management & Operational Strategies**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



# مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی

دوره ۵، شماره (۳)، (۱۴۰۳)، ۳۶۷-۳۴۸

www.journal-imos.ir



## نوع مقاله: پژوهشی

### تخصیص منصفانه هزینه ثابت در سیستم‌های یک دو مرحله‌ای با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

فرانک حسین زاده سلجوچی<sup>۱</sup>، علیرضا پیشگوی<sup>۱</sup>، فرهاد حمیدی<sup>۱</sup>

اگروه ریاضی-آمار و کامپیوتر، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

#### چکیده

هدف: تخصیص عادلانه هزینه ثابت در یک مجموعه از واحدهای رقابتی، یکی از مسائل حائز اهمیت و مهم مدیریتی است. این مقاله به ارایه روشی جدید برای تخصیص منصفانه هزینه بین واحدهای رقابتی و قوتی به صورت یک‌بخشی هستند یا دارای دو زیربخش می‌باشند، می‌پردازد. در تخصیص هزینه، علاوه بر حفظ یا افزایش کارایی، باید به شرایط رقابتی و همکاری بین واحدهای تحت ارزیابی نیز توجه شود.

روش شناسی پژوهش: تحلیل پوششی داده‌ها، یکی از روش‌های مقایسه کارایی واحدهای رقابتی و تخصیص هزینه ثابت بین واحدهای مختلف است. کارایی متقاطع در تحلیل پوششی داده‌ها یکی از روش‌های تخصیص است که نمی‌تواند تخصیص منحصر به فردی ارایه دهد. در این مقاله با استفاده از معرفی روش کارایی متقاطع بهبودیافته و الگوریتم پیشنهادی، هزینه ثابت منحصر به فردی را به واحدهای تحت ارزیابی در سیستم‌های تک مرحله‌ای و زنجیره تامین دو مرحله‌ای به طور عادلانه تخصیص می‌دهیم. این روش پیچیدگی محاسبات روش‌های قبلی را ندارد.

یافته‌ها: نتایج حاصل از روش پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی، ۲۹ شعبه بانک ایرانی و کارخانه آهن و استیل در کشور چین در حالت یک مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با ارایه مثالی به منظور بررسی میزان کارایی پس از تخصیص هزینه و مقایسه با سایر روش‌های نویسنده‌گان قبلی نیز مثالی ارایه شده است. سپس برای تعیین مدل در حالت دو مرحله‌ای، از داده‌های ۲۴ شرکت ییمه با شاخص‌های ورودی، میانی و خروجی استفاده شده است.

اصالت / ارزش افزوده علمی: روش جدید تخصیص منصفانه هزینه بین واحدهای رقابتی و متقاطع، به نحوی ارایه شده که باعث بهبود و یا حفظ کارایی تمامی واحدهای گردد. مطابق ساختار داخلی واحدهای رقابتی و همکاری کل و کارایی مراحل داخلی آن نیز در نظر گرفته شود.

کلیدواژه‌ها: تخصیص هزینه ثابت، سیستم دو مرحله‌ای، کارایی متقاطع بهبودیافته.

#### ۱- مقدمه

تخصیص و توزیع عادلانه هزینه ثابت در یک مجموعه از نهادهای رقابتی یکی از مسائل مهم مدیریتی است که اغلب سازمان‌ها با آن مواجه هستند. در تخصیص هزینه علاوه بر رویکرد حفظ و افزایش کارایی باید به شرایط رقابتی و همکاری بین واحدهای تحت ارزیابی نیز توجه شود. تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک برآوردهای کارایی است، اما می‌تواند برای حل بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری از جمله مسائل تخصیص هزینه استفاده شود.

اوین روش تخصیص هزینه ثابت مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای سیستم‌های تک مرحله‌ای توسط کوک و کریس [1] پیشنهاد شد. مدل‌های تخصیص هزینه ثابت را بر اساس تاثیر روی کارایی به دو دسته می‌توان تقسیم کرد، اصل عدم تغییر کارایی و اصل موثر پس از تخصیص. دسته اول شامل مدل‌هایی است که پس از تخصیص کارایی را بدون تغییر حفظ می‌کند. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های کوک و ژو [2]، جهانشاه لو و

همکاران [3] و مدل لین [4] اشاره کرد. دسته دوم شامل مدل‌هایی است که موجب بهبود کارایی واحدها تصمیم‌گیری می‌شوند که اولین بار توسط بیزی [5] پیشنهاد داده شد. سپس توسعه لی و همکاران [6] توسعه داده شده است.

در اکثر مطالعات موجود بر تعیین تخصیص هزینه ثابت مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای تحت ارزیابی را به عنوان جعبه سیاه در نظر گرفته‌اند. در تعدادی از مطالعه‌های خیر مانند لی و همکاران [7]، چن و همکاران [8]، همچنین چو و همکاران [9] تخصیص هزینه ثابت را با درنظر گرفتن ساختار درونی، برای سیستم‌های دور مرحله‌ای مورد ارزیابی قرار دادند. مطالعات اخیر هزینه ثابت را به عنوان ورودی اضافی برای کل سیستم دور مرحله‌ای در نظر می‌گیرد؛ بنابراین ممکن است تضاد بین دو مرحله ناشی از هزینه ثابت را افزایش دهد. برای حل این مشکل، باید یک استاندارد تدوین کرد یا روند بازی بین دو مرحله را در نظر گرفت. به عنوان مثال، لی و همکاران [7]، [10] با درنظر گرفتن اندازه واحدهای عملیاتی طرح‌های تخصیص را بهینه می‌کنند. به طوری که نتیجه تخصیص از نقطه نظر اندازه متناسب با مصرف ورودی فعلی و تولیدات خروجی باشد. این نشان می‌دهد که هزینه ثابت تخصیص یافته به هر  $DMU$  بر اساس مقادیر ورودی و خروجی است. همچنین چو و همکاران [9] بازی چانه‌زنی بین دو مرحله را در نظر گرفته‌اند و برای محافظت از پیرو، مدل بازی چانه‌زنی درجه رضایت را برای به دست آوردن یک راه حل تعادل نش ارایه کردند که به این معنی است که یک طرح تخصیص منحصر به فرد تعیین شود. به هر حال ممکن است بین دو مرحله رهبر و پیرو رابطه تسلط وجود داشته باشد و در این مورد ممکن است حداقل هزینه خود را تا آنچه که ممکن است به خود تخصیص دهد و در نتیجه مقدار بیشتری از هزینه ثابت را به پیرو اختصاص دهد یعنی بین دو مرحله رابطه عدم همکاری است و بر عکس بین دو مرحله رابطه برابر وجود داشته باشد یعنی دو مرحله در رابطه همکاری است. با توجه به این مفاهیم هر دو مرحله هزینه عادلانه می‌خواهند.

ژو و همکاران [11] با دیدگاه عادلانه در سال ۲۰۲۲ مدل‌ها را در حالت بازی مشارکتی و غیر مشارکتی را بررسی و با معرفی مدل جدید و الگوریتم‌هایی نشان دادند در شرایطی خاص می‌توان تخصیص منحصر به فردی ایجاد نمود. با این حال تخصیص، همواره منحصر به فرد نیست به خصوص در سیستم‌های دور مرحله‌ای؛ بنابراین هدف این مقاله ارایه مدلی در تخصیص هزینه است که علاوه بر تخصیص عادلانه به تمامی واحد تحت ارزیابی، تخصیص هزینه به صورت منحصر به فرد به دست آید که این امر با استفاده از ارتباط اولیه و دوگان در برنامه‌ریزی خطی و تعمیم روش کارایی متقاطع اصلاح شده [12] انجام شده است همچنین روش پیشنهاد قابل استفاده برای سیستم‌های چند مرحله‌ای مانند زنجیره تأمین می‌باشد که در این مقاله روش را برای سیستم‌های دور مرحله‌ای مطرح و با اعمال آن بر مثال‌های کاربردی نحوه تعیین وزن‌های منحصر به فرد و طرح تخصیص ثابت برای تمامی واحدها و زیربخش‌های آن‌ها نشان داده شده است.

این مقاله دارای بخش‌های زیر است. ابتدا معرفی بر کارایی متقاطع و بعضی از قضایای مسایل اولیه و دوگان و مساله آشوب، همچنین محاسبه کارایی متقاطع بهبودیافته خواهیم داشت. سپس در بخش سوم، الگوریتم پیشنهادی را معرفی کرده و مثال‌های عددی برای تخصیص هزینه در سیستم‌های یک مرحله‌ای، همچنین مقایسه و تجزیه و تحلیل نتایج بیان شده است. در بخش چهارم به مرور تخصیص هزینه ثابت در سیستم‌های دور مرحله‌ای پرداخته و در بخش پنجم مدل تعمیم‌یافته کارایی متقاطع برای سیستم‌های دور مرحله‌ای مطرح شده است. در بخش آخر نتایج حاصل از اعمال الگوریتم پیشنهادی بر سیستم‌های دور مرحله‌ای با ارایه مثال‌های کاربردی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

## ۲- کارایی متقاطع

مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی، به هر  $DMU$  اجازه می‌دهد وزن‌های ورودی و خروجی بهینه را برای به حداقل رساندن مقدار کارایی خود انتخاب کند. این دیدگاه باعث می‌شود وزن‌های حاصل از ارزیابی، منجر به بزرگنمایی هرگونه مزایا و نادیده گرفتن معایب شود. همچنین اگرچه مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها می‌توانند واحدهای کارا از ناکارا را تشخیص دهند اما قدرت تمیز دادن بین واحدهای کارا را ندارند. برای رفع این مشکل، رتبه‌بندی واحدهای کارا انجام می‌شود. یکی از معروف‌ترین روش‌های رتبه‌بندی بر اساس کارایی متقاطع، توسط سکستون و همکاران [13] ارایه شده است. در این روش ابتدا کارایی و وزن‌های شاخص‌های ورودی و خروجی مطابق مدل (۱)، محاسبه می‌شود. این مدل را مدل مضربی  $CCR$  می‌نامند.

$$\begin{aligned}
 \theta_o^* &= \text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}, \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_r \geq 0 \quad v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{۱)$$

اگر وزن‌های بهینه مدل (۱) را  $DMU_j \quad j = (1, \dots, n)$  برای هر  $DMU_j$  بدانیم، مقادیر  $E_{pj}$  به ازای وزن‌های  $DMU_p$  از رابطه (۲) تعیین می‌شوند.

$$E_{pj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ip}^* x_{ij}}, \quad p, j = 1, \dots, n, \tag{۲)$$

که جدول ۱، حاصل می‌شود. اکنون کارایی متقاطع  $DMU_j$  از میانگین سطری ماتریس جدول ۱ به دست می‌آید.

جدول ۱- ماتریس کارایی متقاطع.

Table 1- Cross efficiency matrix.

	DMU1	DMU1	...	DMU1	کارایی متقاطع
DMU1	$E_{11}$	$E_{12}$	...	$E_{1n}$	$\bar{E}_1 = \sum_{j=1}^n E_{1j}$
DMU1	$E_{21}$	$E_{22}$	...	$E_{2n}$	$\bar{E}_2 = \sum_{j=2}^n E_{2j}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
DMU1	$E_{n1}$	$E_{n2}$	...	$E_{nn}$	$\bar{E}_n = \sum_{j=1}^n E_{nj}$

برای محاسبه کارایی متقاطع  $DMU_p$  باید وزن‌های بهینه استفاده شود، ولی به دلیل وجود جواب‌های دگرین در جواب حاصل از در مدل (۱)، وزن‌های حاصل منحصر به فرد نخواهد بود و از این‌رو با هر بار جواب شدنی مقادیر کارایی متفاوت به دست می‌آید. برای رفع این مشکل و محاسبه وزن‌های منحصر به فرد از کارایی متقاطع بهبودیافته که وزن‌های منحصر به فرد ایجاد می‌کند استفاده می‌کنیم.

## ۱-۲- کارایی متقاطع بهبودیافته

برای به دست آوردن وزن‌های منحصر به فرد در مدل‌های مضربی، ابتدا به یکی از مباحث مهم و اساسی در برنامه‌ریزی خطی، ارتباط بین مسائل اولیه و دوگان می‌پردازیم. سپس از این ارتباط و مسئله آشوب استفاده می‌کنیم.

ارتباط بین جواب‌های بهینه مسائل  $P$  و  $D$ .

مسائل برنامه‌ریزی خطی پرایمال ( $P$ ) و دوآل ( $D$ ) را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
 P: \text{Min } Z &= cx, \\
 D: \text{Max } W &= wb, \\
 \text{s.t.} \quad Ax &\geq b, \\
 \text{s.t.} \quad wA &\leq c, \\
 x &\geq 0, \quad w \geq 0.
 \end{aligned}$$

که در آن  $A$  ماتریسی  $m \times n$  است و  $.Rank A = m < n$

لم ۱- اگر مسئله  $D$  دارای جواب بهینه دگرین باشد و  $x^*$  جواب اساس شدنی بهینه مسئله  $P$  باشد آنگاه  $x^*$  باید تباہیده باشد [12].

بنابراین اگر تباہیدگی در مساله  $P$  را بر طرف نماییم مساله  $D$  دارای جواب بهینه منحصر به فرد خواهد بود. در حالت تباہیدگی مساله  $P$ ، بردار  $b$  به زیر فضای  $(m-1)$  بعدی از ستون های ماتریس ضرایب  $A$  تعلق دارد. برای رهایی از تباہیدگی از آشوب مقادیر سمت راست استفاده می کنیم که به معنی حرکت دادن مختصرا بردار  $b$  از وضعیت کنونی به وضعیتی است که از فضای موردنظر خارج شود. برای این منظور قرار می دهیم

$$b(\varepsilon) = b + (\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^m)^t,$$

که در آن  $\varepsilon$  عدد مثبت بسیار کوچکی است.

**قضیه ۱** - برای هر بردار  $b \in R^m$  عدد مثبتی مانند  $\varepsilon$  وجود دارد که به ازای هر  $(0, \varepsilon_1) \in \varepsilon$  مدل مضری  $CCR$  غیر تباہیده می باشد.

برهان: [12]

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= cx, \\ \text{s.t. } Ax &= b(\varepsilon), \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه فرم مضری  $CCR$  (مدل (۱)) همواره دارای جواب بهینه دگرین است بنابراین ماتریس کارایی متقطع منحصر به فرد نیست. در روش های موجود، با افزودن قیود جدید تحت عنوان اهداف ثانویه، تلاش شده است که پراکندهگی مقادیر وزن ها را کاهش دهند ولی چون ماتریس اولیه از حالت چندگانگی خارج نمی شود لذا هنوز مشکل جواب های دگرین و به تبع آن عدم یکتایی وزن ها باقی است. چون مدل مضری  $CCR$  یک برنامه ریزی خطی است بنا بر لم ۱، دوگان آن که مدل پوششی  $CCR$  نامیده می شود باید جواب بهینه تباہیده داشته باشد؛ بنابراین می توان با استفاده از عکس نقیض لم ۱، نشان داد که اگر فرم پوششی  $CCR$  جواب غیر تباہگان داشته باشد آنگاه فرم مضری آن جواب بهینه منحصر به فرد خواهد داشت. بر طبق قضیه ۱ و با استفاده از مساله آشوب، فرم پوششی  $CCR$  را به صورت مدل (۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} P: \quad \text{Min } \theta, \\ \text{s.t. } -\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \theta x_{ip} &\geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{rp} + \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{۳}$$

دوگان مدل (۳) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} D: \quad \text{Max } \varepsilon \sum_{i=1}^m v_i + \varepsilon \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}, \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} &= 1, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ v_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{۴}$$

**قضیه ۲** - جواب بهینه مدل (۴) منحصر به فرد است [12].

بر اساس قضیه های ۱ و ۲، اگر برای محاسبه وزن شاخص های ورودی و خروجی از مدل (۴) استفاده کنیم وزن های حاصل، منحصر به فرد به دست می آیند؛ بنابراین ماتریس کارایی متقطع نیز منحصر به فرد خواهد بود و به موجب آن، تخصیص هزینه هر واحد تصمیم گیرنده، منحصر به فرد می باشد.

### ۳- الگوریتم تخصیص هزینه ثابت بر اساس کارایی متقطع بهبود یافته

در الگوریتم کارایی متقطع بهبود یافته، تخصیص هزینه ثابت را می توان از طریق جدول های متقطع و روش های ساده الگوریتم به واحد های تصمیم گیری نسبت داد.

در ادامه مراحل الگوریتم توضیح داده شده است.

**گام ۱** - وزن های کارایی  $u_i^*$  و  $v_i^*$  و مقدار کارایی  $\theta_0^*$  برای هر  $DMU$  توسط مدل مضربی  $CCR$  بهبودیافته محاسبه می کنیم.

**گام ۲** - کارایی متقاطع بهبودیافته برای هر  $DMU$  محاسبه و جدول کارایی متقاطع بهبودیافته را تشکیل می دهیم.

**گام ۳** - شامل دو مرحله زیر است:

۱ - ماکزیمم هر ستون را انتخاب می کنیم  $X_i =$

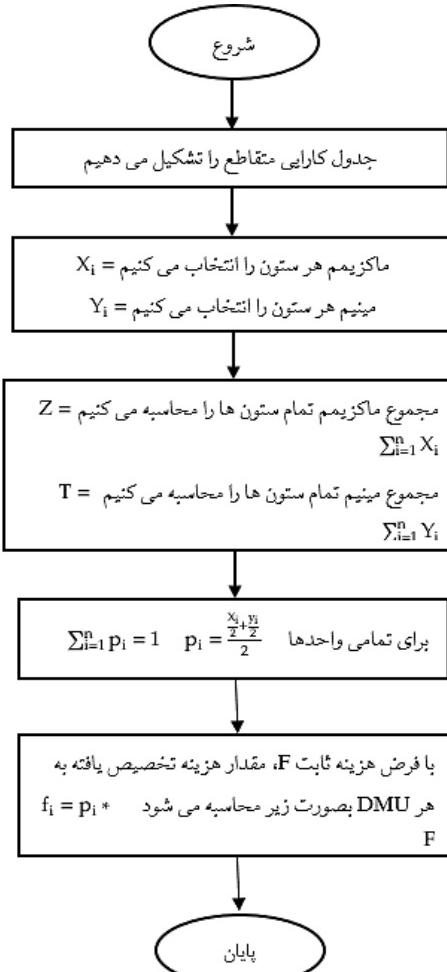
۲ - مینیمم هر ستون را انتخاب می کنیم  $Y_i =$

**گام ۴** - مجموع ماکسیمم و مینیمم ستون ها را محاسبه می کنیم  $(T = \sum_{i=1}^n Y_i)$  و  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ .

**گام ۵** -  $P_i$  را برای هر  $i$  به صورت  $P_i = \frac{X_i Y_i}{Z - T}$  محاسبه می کنیم.

درنهایت فرض کنیم هزینه ثابت  $F$  واحد باشد که قرار است بین  $DMU$  توزیع شود، در این صورت سهم هر  $DMU$  به صورت  $f_i = p_i * F$  محاسبه می شود.

مقدار  $f_i$ ، مقدار نهایی تخصیص عادلانه هزینه ثابت واحد تحت ارزیابی خواهد بود. شکل ۱، گام های الگوریتم پیشنهادی است.



شکل ۱- الگوریتم پیشنهادی تخصیص هزینه.

Figure 1- Proposed cost allocation algorithm.

#### ۴- مثال‌های عددی

مثال ۱ - بهمنظور نشان دادن سادگی الگوریتم پیشنهادی و سهم مجموع مقادیر که برابر عدد یک می‌شود الگوریتم ارایه شده را با یک مثال ساده مورد بررسی قرار می‌دهیم. جدول ۲، ۳ بازیکن با ۳ معیار مختلف برگرفته از مقاله ناکابایشی و همکاران را نشان می‌دهد [14]. در جدول ۳ میانگین حداکثر و حداقل مقدار ارزش عملکرد هر بازیکن را نشان می‌دهد که مشاهده می‌شود جمع میانگین حداکثر و حداقل مقدار برابر یک نمی‌شود. ولی با مشاهده آخرین عدد در سطر و ستون آخر در جدول ۴ با استفاده از الگوریتم پیشنهادشده جمع کل مقدار یک می‌شود و می‌توان گفت که سهم هر واحد تحت ارزیابی از یک واحد چقدر است و با توجه به اینکه این سهم به نسبت، بر اساس وزن‌های ورودی و خروجی به هر واحد تخصیص یافته است می‌توان امیدوار شد که تخصیص عادلانه‌ای به هر واحد اختصاص یافته است؛ بنابراین در اکثر مسایل برای تعیین وزن‌های هر واحد مورد ارزیابی می‌توان از این الگوریتم استفاده کرد.

جدول ۲- داده‌های مربوط به مثال ۱.

Table 2- Data related to example 1.

		بازیکن‌ها		
		A	B	C
معیار ۱		0.25	0.3	0.45
معیار ۲		0.5	0.25	0.25
معیار ۳		0.125	0.5	0.375

جدول ۳- میانگین کمترین و بیشترین مقادیر.

Table 3- The average of the lowest and highest values.

بازیکن‌ها				
	A	B	C	Sum
بیشترین مقدار	0.5	0.5	0.45	1.45
کمترین مقدار	0.125	0.25	0.25	0.625
میانگین	0.3125	0.375	0.35	1.0375

جدول ۴- اجرا مراحل الگوریتم پیشنهادی بر روی داده‌های مثال ۱.

Table 4- Implementation of the steps of the proposed algorithm on the data of example 1.

بازیکن‌ها				
	A	B	C	Sum
$X_i = \text{Max}$	0.5	0.5	0.45	Z=1.45
$Y_i = \text{Min}$	0.125	0.25	0.25	T=0.625
$\bar{X}_i = \frac{\text{Max}}{\sum \text{Max}}$	0.5	0.5	0.45	
$\bar{Y}_i = \frac{\text{Min}}{\sum \text{min}}$	0.125	0.25	0.25	
$P_i = \frac{\bar{X}_i + \bar{Y}_i}{2}$	0.2724137931	0.3724137931	0.355172413793	1

مثال ۲ - در این بخش بهمنظور ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، آن را بر روی داده‌های واقعی ۲۰ شعبه بانکی در ایران برگرفته از مقاله امیر تیموری و کرد رستمی [15] که دارای ۳ ورودی و ۳ خروجی می‌باشد اجرا می‌کنیم. ورودی‌ها شامل کارمندان، پایانه‌های کامپیوتر و مساحت شعبه (مترمربع) و خروجی‌ها شامل مقدار سپرده‌ها، مبالغ وام‌ها و میزان کارمزد می‌باشند. مقادیر ورودی و خروجی در جدول ۵ آورده شده است. همچنین در ستون‌های دوم تا هفتم جدول ۶ وزن‌های بهینه حاصل از مدل (۷) و در ستون هشتم، میزان کارایی به دست آمده از این مدل آورده شده است.

جدول ۵- مقادیر ورودی و خروجی‌ها مثال ۲.

Table 5- Values of inputs and outputs example 2.

کارمزد	وام‌ها	سپرده‌ها	مساحت	پایانه‌های کامپیوتر	کارمند	شعب
0.5214	0.5214	0.1900	0.1550	0.70	0.9503	1
0.6274	0.6274	0.2266	0.60	0.75	0.7962	2
0.9703	0.9703	0.2283	0.75	0.5125	0.7982	3
0.6324	0.6324	0.1927	0.55	0.2100	0.8651	4
0.7221	0.7221	0.2333	0.85	0.2675	0.8151	5
0.6025	0.6025	0.2069	0.65	0.5000	0.8471	6
0.9000	0.9000	0.1824	0.60	0.3500	0.7189	7
0.2340	0.2340	0.1250	0.75	0.1200	0.7853	8
0.3643	0.3643	0.0801	0.60	0.1350	0.4756	9
0.1835	0.1835	0.0818	0.55	0.5100	0.6782	10
0.3179	0.3179	0.2117	1	0.3050	0.7112	11
0.9225	0.9225	0.1227	0.65	0.2550	0.8113	12
0.6452	0.6452	0.1755	0.85	0.3400	0.6586	13
0.5143	0.5143	0.1443	0.80	0.5400	0.9763	14
0.2617	0.2617	1	0.95	0.4500	0.6845	15
0.4021	0.4021	0.1151	0.90	0.5250	0.6127	16
0.1614	0.1614	0.0900	0.60	0.2050	1	17
0.3492	0.3492	0.0591	0.65	0.2350	0.6337	18
0.1112	0.1112	0.0385	0.70	0.2375	0.3715	19
0.7643	0.7643	0.1101	0.55	0.5000	0.5827	20

جدول ۶- وزن‌های ورودی، خروجی و نمره کارایی حاصل از مدل کارایی CCR بهبودیافته (۳).

Table 6- Weights of input, output and efficiency score obtained from the improved CCR efficiency model (3).

کارایی	v <sub>3</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>1</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>1</sub>	شعب
1	6.4516	0	0	0.3765	0.7319	2.6747	1
0.8328	0	0	1.6666	0	0.8344	1.3649	2
0.9909	0	0	0	1.2528	0	0.8732	0.6290
1	4.7190	0	0	0	0	0.5403	1.9742
0.8989	0	1.7135	0	0.6644	0	0.9272	0.9832
0.7477	0	0	1.5385	0	0.2779	0.2866	1.2866
1	1.2306	0	0.6031	0.2885	0.1321	0.7817	1.1066
0.7978	0	0	8.3333	0	0.4864	0.9454	3.4548
0.7887	0	4.6979	0	0.7690	0.2834	1.4862	2.2237
0.2888	0	0	1.8181	0	0	0.9103	1.4890
0.6040	0	0	0	1.2633	0.7808	0.3458	0.8473
1	2.5785	0	0	0.4221	0.1555	0.8157	1.2205
0.8166	0	0	0	1.5183	0	1.0583	0.7623
0.4696	0	0	1.2499	0	0	0.6258	1.0237
1	1.2420	0	0	0.6444	0.2715	0.6172	0.8118
0.6392	0	0	0	1.6321	0.5905	0.6540	0.8880
1	4.8780	0	0	0	0	0.8524	1.6404
0.4734	0	1.4067	0	0	1.0563	0	1.0477
0.4081	0	0	0	0	2.6917	0	1.3515
1	0	0	1.0285	0.7768	0.4455	0.4455	1.2032

با توجه به اینکه، وزن‌های جدول ۶ بر اساس مدل (۴) محاسبه شده است و طبق قضایایی ذکر شده، منحصر به فرد هستند بنابراین می‌توان الگوریتم پیشنهادی را بر روی این داده‌ها پیاده‌سازی کرد و مطمئناً پس از اعمال الگوریتم پیشنهادی، مقدار هزینه ثابت منحصر به فردی به هر واحد خواهد رسید. جدول ۷ شامل ماتریس کارایی متقاطع بهبودیافته و همچنین مراحل الگوریتم پیشنهادی برای مثال ۲ می‌باشد. سطرها و ستون‌های ۱ تا ۲۱ شامل، ماتریس کارایی متقاطع بهبودیافته می‌باشد. سطرهای ۲۱ تا ۲۷ مراحل الگوریتم را نشان می‌دهد. سطر آخر جدول ۷ مقدار مجموع هزینه‌ها را نشان می‌دهد را به هر  $DMU$  تحت ارزیابی نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌نمایید ستون و سطر آخر جدول ۷ مقدار مجموع هزینه‌ها را نشان می‌دهد که دقیقاً برابر ۱۰۰ واحد می‌باشد یعنی الگوریتم ارایه شده به‌طور کامل و دقیق هر ۱۰۰ واحد هزینه ثابت را به‌طور عادلانه و به صورت منحصر به فرد بین شعب تحت ارزیابی تقسیم کرده است. به عنوان مثال در جدول ۷ مشاهده می‌کنید سهم شعبه بانک یک موردنظر برابر با مقدار ۴۰۳۲۰ از مجموع ۱۰۰ واحد هزینه ثابت می‌باشد.

جدول ۷- نتایج تخصیص هزینه ایجادگری پوشش‌نامه ابتدایی مثال

Table 7- Cost allocation results of the proposed algorithm for example 2.

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1.00	0.60	0.48	1.00	0.75	0.57	0.74	1.00	0.88	0.60	0.46	0.88	0.48	0.60	0.69	0.44	1.00	0.67	0.48	0.46
2	0.19	0.83	0.69	0.19	0.36	0.83	0.44	0.19	0.30	0.83	0.58	0.30	0.69	0.83	0.40	0.68	0.19	0.43	0.69	0.73
3	0.43	0.90	0.99	0.43	0.80	0.80	0.43	0.67	0.90	0.62	0.62	0.67	0.99	0.90	0.74	0.76	0.48	0.88	0.99	0.67
4	1.00	0.86	0.62	1.00	0.83	1.00	1.00	1.00	0.86	1.00	0.62	0.86	1.00	0.83	0.83	0.78	0.62	1.00		
5	0.72	0.65	0.76	0.72	0.90	0.59	0.79	0.72	0.88	0.65	0.57	0.88	0.76	0.65	0.82	0.62	0.76	0.89	0.76	0.54
6	0.37	0.72	0.62	0.54	0.75	0.62	0.62	0.37	0.51	0.72	0.67	0.51	0.62	0.72	0.60	0.67	0.35	0.58	0.62	0.72
7	0.63	1.00	1.00	0.63	0.94	1.00	1.00	0.63	0.89	1.00	1.00	0.89	1.00	1.00	1.00	1.00	0.62	1.00	1.00	1.00
8	0.80	0.29	0.29	0.80	0.47	0.32	0.44	0.80	0.61	0.29	0.41	0.61	0.29	0.29	0.50	0.34	0.69	0.41	0.29	0.36
9	0.66	0.41	0.62	0.66	0.76	0.40	0.61	0.66	0.79	0.41	0.60	0.79	0.62	0.41	0.75	0.58	0.67	0.74	0.62	0.48
10	0.11	0.29	0.25	0.11	0.19	0.26	0.21	0.11	0.16	0.29	0.17	0.16	0.25	0.29	0.18	0.20	0.12	0.21	0.25	0.20
11	0.48	0.33	0.46	0.48	0.51	0.36	0.45	0.48	0.53	0.33	0.60	0.53	0.46	0.33	0.57	0.55	0.42	0.51	0.46	0.49
12	0.75	0.87	0.87	0.75	1.00	0.84	1.00	0.75	1.00	0.87	0.82	1.00	0.87	0.87	1.00	0.82	0.79	1.00	0.87	0.80
13	0.47	0.55	0.82	0.47	0.76	0.51	0.65	0.47	0.68	0.55	0.61	0.68	0.82	0.55	0.72	0.68	0.51	0.80	0.82	0.54
14	0.25	0.47	0.44	0.25	0.39	0.44	0.42	0.25	0.35	0.47	0.35	0.35	0.44	0.47	0.39	0.38	0.26	0.42	0.44	0.37
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.85	1.00	1.00	1.00
16	0.23	0.33	0.55	0.23	0.37	0.35	0.37	0.23	0.34	0.33	0.63	0.34	0.55	0.33	0.45	0.64	0.21	0.43	0.55	0.53
17	0.78	0.96	0.74	0.78	1.00	0.80	1.00	0.78	1.00	0.96	0.41	1.00	0.74	0.96	0.82	0.51	1.00	0.95	0.74	0.46
18	0.29	0.34	0.43	0.29	0.46	0.29	0.40	0.29	0.42	0.34	0.34	0.42	0.43	0.34	0.40	0.31	0.34	0.47	0.43	0.25
19	0.19	0.18	0.41	0.19	0.33	0.17	0.25	0.19	0.28	0.18	0.24	0.28	0.41	0.18	0.33	0.37	0.19	0.36	0.41	0.24
20	0.32	0.72	0.83	0.32	0.55	0.80	0.63	0.32	0.49	0.72	1.00	0.49	0.83	0.72	0.68	1.00	0.29	0.64	0.83	1.00
Min/Sum	0.03	0.05	0.07	0.03	0.05	0.05	0.06	0.03	0.04	0.05	0.04	0.04	0.07	0.05	0.05	0.06	0.03	0.06	0.07	0.06
Max/ Sum	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Average	0.04	0.05	0.06	0.04	0.05	0.05	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05	0.05	0.05	0.04	0.05	0.06	0.05
f=F*P	4.03	5.01	5.98	4.03	5.15	4.87	5.42	4.03	4.73	5.01	4.87	4.73	5.98	5.01	5.29	4.17	5.42	5.98	5.29	

**مثال ۳**- در این بخش به منظور ارزیابی و کاربردی بودن روش پیشنهادی، آن را بر روی داده‌های واقعی کارخانه آهن و استیل با ۱۰ خط تولید استان آنهوی<sup>۱</sup> کشور چین پیاده‌سازی می‌کنیم. این مثال یک کاربرد واقعی در کارخانه آهن و استیل است. این داده‌ها برگرفته از مقاله لی و همکاران [10] می‌باشد. این شرکت دارای ده خط تولید است و با توجه به مقررات زیست محیطی و انرژی، این شرکت با فشار زیادی برای بهبود وضعیت ساختار تولید و افزایش کارایی مواجه است. در سال ۲۰۱۵، این شرکت ۲۰ میلیون یوان (*RMB*) را برای ارتقاء و مقاومسازی برخی تجهیزات ضروری تولید هزینه کرد؛ بنابراین، مدیران خطوط تولید خود را ملزم می‌کند تا کل هزینه را پوشش دهند. در این کاربرد، هر خط تولید به عنوان یک *DMU* مستقل و همگن در نظر گرفته می‌شود که دارای چهار ورودی (زغالسنگ استاندارد، سنگ آهن، آب جدید و نیروی کار) و دو خروجی (تولید فولاد و آهن) است که در جدول ۷ نشان داده شده است. هزینه ارتقا را به طور کامل جبران کنید، در اینجا هزینه ثابتی که باید تخصیص داده شود معادل  $F = 2000$  واحد است (هر واحد معادل ده هزار یوان).

ورودی‌ها شامل زغالسنگ استاندارد، سنگ آهن، آب جدید و نیروی کار، خروجی‌ها شامل فولاد و آهن می‌باشد. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها در جدول ۷ آورده شده است. ستون‌های هشتم و نهم جدول ۷ به ترتیب میزان هزینه ثابت تخصیص یافته به هر خط تولید توسط روش لی و روش پیشنهادی ما می‌باشد. با توجه به تخصیص نهایی در هر دوروش چهار خط تولید پنجم، هفتم، هشتم و نهم بیشترین مقدار بودجه را به خود تخصیص داده‌اند و کمترین تخصیص هزینه ثابت در هر دوروش مربوط به واحدهای یک، چهارم و دهم می‌باشد. در روش ما، حداکثر تخصیص هزینه ثابت به واحد تحت ارزیابی ۵ تخصیص یافته است، در حالی که در مقاله ذکر شده بیشترین تخصیص هزینه به واحد ۷ اختصاص یافته است. با درنظر گرفتن این دو واحد، مشاهده می‌شود که واحد ۵ با ورودی کمتر، خروجی بیشتری نسبت به واحد ۷ تولید می‌کند؛ بنابراین تخصیص هزینه بیشتر به خط تولید ۵ عادلانه‌تر و منطقی‌تر خواهد بود که یکی از ویژگی‌های مطرح شده مدل پیشنهادی ما می‌باشد.

جدول ۸- مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها و تخصیص هزینه به هر واحد.

Table 8- Values of inputs and outputs and cost allocation to each unit.

DMU	زنگ آهن	آهن	تخصیص هزینه یانگ	تخصیص هزینه لی و همکاران	روش پیشنهادی			
1	74,115	375,944	2420	374	150,236	41,917	87.1106	142.8732
2	84,713	381,974	3464	224	106,177	68,738	106.8298	174.4780
3	76,087	299,056	2848	363	224,356	42,603	154.3165	180.2188
4	109,150	420,650	1645	397	133,291	48,536	102.0796	178.3685
5	114,462	356,279	1661	324	301,229	60,390	314.1732	308.1870
6	104,493	427,276	3024	356	200,101	60,148	156.9450	157.4165
7	118,825	392,056	4220	351	253,604	125,641	400.4142	243.7236
8	159,620	283,154	3136	290	160,096	102,599	273.6742	245.6999
9	193,873	391,289	1976	341	160,441	120,832	351.0359	228.4449
10	146,680	278,386	2246	442	97,847	49,659	53.4210	140.5891

**مثال ۴**- در این مثال رویکرد پیشنهادشده را به منظور مقایسه با روش‌های نویسنده‌گان قبلی و همچنین تاثیر افزایش مقدار کارایی پس از تخصیص هزینه با استفاده از داده‌های ارایه شده در مقاله کوک و کریس [1] با دوازده واحد تحت ارزیابی با ۳ ورودی و ۲ خروجی مورد بررسی، تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. جدول ۹ مقادیر ورودی و خروجی و همچنین مقدار کارایی واحدهای تحت ارزیابی را قبل از تخصیص هزینه نشان می‌دهد.

جدول ۹- مقادیر ورودی و خروجی مثال ۴.

Table 9 - Input and output values of example 4.

DMU	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$\theta_{CCR}^*$
1	350	39	9	67	751	0.7567
2	298	26	8	73	611	0.9230
3	422	31	7	75	584	0.7470
4	281	16	9	70	665	1
5	301	16	6	75	445	1
6	360	29	17	83	1070	0.9612
7	540	18	10	72	457	0.8604
8	276	33	5	78	590	1
9	323	25	5	75	1074	1
10	444	64	6	74	1072	0.8318
11	323	25	5	25	350	0.3333
12	444	64	6	104	1199	1

جدول ۱۰- تخصیص هزینه با رویکردهای مختلف.

Table 10- Cost allocation with different approaches.

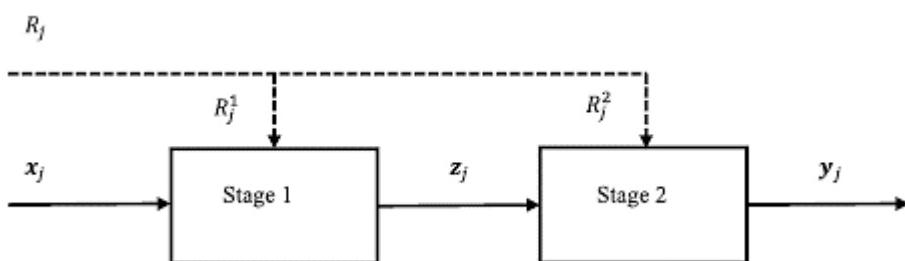
DMU	روش پیشنهادی	کوک و کریس (۱۹۹)	بیزلی (۲۰۰۳)	کوک و ژو (۲۰۰۵)	دو و همکاران (۲۰۱۴)	خدابخشی همکاران (۲۰۱۴)	لی و همکاران (۲۰۱۸)	$\theta_{\text{New}}^*$
1	7.156	14.52	6.78	11.22	5.79	6.75	5.538	0.874
2	8.130	6.74	7.21	0	7.95	8.04	7.532	0.985
3	7.353	9.32	6.83	16.95	6.54	7.28	7.350	1
4	9.297	5.60	8.47	0	11.10	9.37	7.873	1
5	9.648	5.70	7.08	0	8.69	9.86	6.377	1
6	8.092	8.15	10.06	15.34	13.49	8.10	11.499	1
7	7.163	8.86	5.09	0	7.10	7	5.901	1
8	8.498	6.26	7.74	0	6.83	8.83	7.770	1
9	13.184	7.31	15.11	17.62	16.68	13.13	11.899	1
10	7.707	10.08	10.08	21.15	5.42	7.89	11.378	0.9691
11	4.338	7.31	1.58	17.62	0	4.32	2.735	0.6187
12	9.428	10.08	13.97	0	10.41	9.44	14.142	1

ستون دوم جدول ۱۰ رویکرد پیشنهادی ما را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنید بیشترین مقدار تخصیص یافته به  $DMU_9$  و کمترین مقدار به  $DMU_{11}$  تعلق گرفته است.  $DMU_9$  و  $DMU_{11}$  چون با ورودی یکسان خروجی متفاوتی دارند لذا اگر بر روی این  $DMUs$  مرکز کنیم مشاهده می‌کنیم رویکرد ما به  $DMU_9$  که خروجی بالاتری دارد مقدار بیشتری تخصیص داده است. همچنین با مقایسه بین  $DMU_{10}$  و  $DMU_{12}$  نیز که ورودی یکسان و خروجی متفاوت دارند تفاوت قابل شده است و به  $DMU_{12}$  با خروجی بالاتر مقدار بیشتری اختصاص داده است. از دیگر مزیت‌های روش ما به هر  $DMU$  مقدار مثبت هزینه تخصیص داده و به هیچ  $DMU$  مقدار صفر مانند روش کوک و ژو [2] را تخصیص نداده است. همچنین در ستون ۹ جدول ۱۰ مشاهده می‌کنید، که کارایی  $DMU$  ناکارا پس از تخصیص هزینه بهبود یافته و  $DMUs$  کارا، کارایی خود را حفظ کرده‌اند.

## ۵- تخصیص هزینه ثابت در تحلیل پوششی داده‌ها دو مرحله‌ای

عدم توجه به ساختار داخلی واحدا، تخصیص هزینه ثابت مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها جعبه سیاه نامیده می‌شود. در مطالعات اخیر منتشر شده توسط لی و همکاران [7]، چو و همکاران [9]، ژو و همکاران [11] تخصیص هزینه ثابت را با درنظر گرفتن ساختار درونی تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای مورد ارزیابی قرار داده‌اند.

ساختار کلی یک سیستم دو مرحله‌ای با تخصیص هزینه ثابت در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- سیستم دو مرحله‌ای با تخصیص هزینه ثابت.

Figure 2- Two-stage system with fixed cost allocation.

فرض کنید  $R$  هزینه ثابت، باید به هر  $DMU$  اختصاص داده شود و  $R_j$  نشان‌دهنده هزینه تخصیص داده شده به هر  $DMU_j$  می‌باشد.  $R_j^1, R_j^2$  به ترتیب نشان‌دهنده تخصیص هزینه به مرحله اول و مرحله دوم می‌باشد که  $R_j = R_j^1 + R_j^2$  و در نهایت معادله (۵) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R, \quad R_j^1, R_j^2 \geq 0, \quad (5)$$

که هزینه ثابت کل  $R$  به هر مرحله از هر  $DMU$  اختصاص داده شده است را نشان می‌دهد. بر اساس مدل چن و همکاران [8] مدل (۶) می‌تواند کارایی هر  $DMU_0$  را مورد ارزیابی قرار دهد.

$$\begin{aligned} & \max \frac{w_1 * \sum_{d=1}^p w_d z_{do}}{\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1\right)} + \frac{w_2 * \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}, \\ \text{s.t. } & \frac{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}}{\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_j^1\right)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{dj} + v_{m+1} R_j^2\right)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R, \end{aligned} \quad (6)$$

در مدل (۶)، وزن  $v_{m+1} \geq 0$ . در غیر این صورت مقدار ورودی  $R_j^1, R_j^2$  تاثیری در کارایی واحد تحت ارزیابی نخواهد داشت و این ورودی‌ها نادیده گرفته خواهند شد. همچنین وزن‌های  $w_1, w_2$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1 + \left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}. \\ w_2 &= \frac{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1 + \left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}. \end{aligned}$$

با جایگزینی وزن‌های فوق در مدل (۶) و  $v_{m+1} = 1$  مدل (۷) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \max \frac{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + R_o^1 + \sum_{d=1}^p w_d z_{do} + R_o^2\right)}, \\ \text{s.t. } & \sum_{d=1}^p w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - R_j^1 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^p w_d z_{dj} - R_j^2 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R. \end{aligned} \quad (7)$$

با حل مدل (۷) جواب‌های بهینه  $(v_i^*, w_d^*, u_r^*, R_j^1, R_j^2 \forall i, j, d)$  به دست می‌آید، همچنین کارایی کل و کارایی هر مرحله برای هر  $DMU_o$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} E_o^* &= \frac{\left(\sum_{d=1}^p w_d^* z_{do} + \sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io} + \sum_{d=1}^p w_d^* z_{do} + R_o^1 + R_o^2\right)}, \\ E_1^* &= \frac{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{do}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io} + R_o^1}, \quad E_1^* = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}}{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{do} + R_o^2}. \end{aligned}$$

بدیهی است  $E_O^* = 1$  گر و فقط اگر  $E_O^{2*} = 1$  و  $E_1^{1*} = 1$  به دلیل

$$E_O^* = w_1 E_1^{1*} + w_2 E_2^{2*}, w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 \geq 0.$$

باین حال طرح تخصیص کارایی برای  $R_j^1, R_j^2$  باز هم منحصر به فرد نخواهد بود.

## ۶- تعمیم مدل کارایی متقاطع دومرحله‌ای

کانو و لیو [16] برای محاسبه کارایی متقاطع سیستم‌های دومرحله‌ای از دیدگاه دایل و گرین [17] که به صورت مدل (۸) می‌باشد استفاده نموده‌اند. در این دیدگاه هدف این است در حالی که مقدار کارایی  $DMU_d$  که از فرم مضربی مدل  $CCR$  در مرحله اول به دست می‌آید، حفظ شود و همچنین بالاترین کارایی برای  $n-1$  دیگر حفظ شود.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \frac{\sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj}}{\sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}}, \\
 & \text{s.t. } \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd} \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id}, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_{rd}, v_{id} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

فرم خطی مدل (۸) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj}, \\
 & \text{s.t. } \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd} \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id}, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_{rd}, v_{id} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۹}$$

کائو و لیو [16] در ابتدا کارایی سیستم و بخش‌ها را بر اساس مقاله کائو و هانگ [18] برای سیستم سری به صورت زیر اندازه‌گیری نمودند:

$$\begin{aligned}
 E_{dd}^s &= \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd}, \\
 &\text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id} = 1, \\
 &\sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 &\sum_{g=h(p-1)+1}^{h(p)} w_{gd} Z_{gj}^{(p)} - \sum_{g=h(p-2)+1}^{h(p-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(p-1)} \leq 0, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 &\sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{g=h(q-2)+1}^{h(q-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(q)} \leq 0, \\
 &u_{rd}, v_{id}, w_{gd} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad g = 1, \dots, h.
 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

بنابراین مدل (۱۰) را می‌توان برای محاسبه کارایی سیستم‌های شبکه‌ای سری به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 E^s &= \text{Max} \frac{\sum_{j=1, j \neq d}^n u_{rd} Y_{rj}}{\sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}}, \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd}^s \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id}, \\
 & \sum_{\substack{g=1 \\ h(1)}}^{h(1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{\substack{g=1 \\ h(1)}}^{h(p-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{\substack{g=h(p-1)+1 \\ h(p)}}^{h(p-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(p)} - \sum_{\substack{g=h(p-2)+1 \\ h(p-1)}}^{h(p-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(p-1)} \leq 0, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{\substack{g=h(q-2)+1 \\ h(q-1)}}^{h(q-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(q)} \leq 0, \\
 & u_{rd}, v_{id}, w_{gd} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad g = 1, \dots, h.
 \end{aligned} \tag{11}$$

فرض کنید  $(u^*, v^*, w^*)$  جواب‌های بهینه مدل (11) باشد در این صورت کارایی کل سیستم و کارایی هر بخش به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}
 E_{dk}^s &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{rd}^* Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{id}^* X_{Ik}}, \\
 E_{dk}^{(1)} &= \frac{\sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd}^* Z_{gk}^{(1)}}{\sum_{i=1}^m v_{id}^* X_{Ik}}, \\
 E_{dk}^{(p)} &= \frac{\sum_{g=h(p-1)+1}^{h(p)} w_{gd}^* Z_{gj}^{(p)}}{\sum_{g=h(p-2)+1}^{h(p-1)} w_{gd}^* Z_{gj}^{(p-1)}}, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 E_{dk}^{(p)} &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{rd}^* Y_{rk}}{\sum_{g=h(q-2)+1}^{h(q-1)} w_{gd}^* Z_{gj}^{(q)}}.
 \end{aligned}$$

واضح است که کارایی کل سیستم برابر است با حاصل ضرب کارایی  $q$  بخش‌ها.

$$E_{dk}^s = \prod_{p=1}^q E_{dk}^{(p)}.$$

در صورت جواب دگرین در مدل (11)، مدل کائو و لیو با استفاده از ایده مطرح شده در مقاله ۲۰۰۸ کائو و هانگ [18] برای یافتن ضریب‌هایی که بالاترین کارایی کل را از تمامی DMUs برای بخشی که مهم‌تر تلقی می‌شود، تولید می‌کنند، در حالی که کارایی سیستم کل  $E^s$  حفظ می‌شود. فرض کنید بخش یک مهم‌ترین بخش در نظر گرفته شود بنابراین مدل (12) را می‌توان برای واحد تحت ارزیابی جهت تعیین ضرایب سایر واحدها برای محاسبه کارایی متقاطع استفاده نمود.

$$\begin{aligned}
 E^1 &= \text{Max} \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Z_{gj}^{(1)}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}}, \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd}^S \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}, \\
 & \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} = E^s \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}, \\
 & \sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{g=h(p-1)+1}^{h(p)} w_{gq} Z_{gj}^{(p)} - \sum_{g=h(p-2)+1}^{h(p-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(p-1)} \leq 0, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{g=h(q-2)+1}^{h(q-1)} w_{gq} Z_{gj}^{(q)} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_{rd}, v_{id}, w_{gd} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad g = 1, \dots, h.
 \end{aligned} \tag{12}$$

توجه داشته باشید که بخش ۱،  $DMU_O$  نیز در تابع هدف گنجانده شده است. اگر ضریب‌های محاسبه شده از مدل (۹) با ضریب‌های به دست آمده از مدل (۱۱) متفاوت باشد، می‌توان یک مدل مشابه برای به حداکثر رساندن بازده کل استفاده نمود، در حالی که بالاترین کارایی کل سیستم  $E^S$  و کارایی بخش یک ( $E^1$ ) را حفظ می‌کند. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که ضریب‌های محاسبه شده از مدل فعلی با ضریب‌های به دست آمده از مدل ادامه‌دهنده یکسان شوند. سپس می‌دانیم که ضریب‌های فعلی را حل متصربه‌فرد هستند. با این حال، در کارایی متقاطع  $DEA$  کل واحد معمولی، تنها یک مدل هدف ثانویه معمولاً حل می‌شود، این احتمال که بهینه جایگزین هنوز وجود داشته باشد ناچیز درنظر گرفته می‌شود. علاوه بر این، از آنجایی که سیستم سری از قدرت تمایز قوی‌تری نسبت به سیستم کل واحد برخوردار است، زیرا محدودیت‌های بیشتری درگیر است، امکان بهینه جایگزین کمتر است و نتایج به دست آمده از حل مدل (۱۱) باید به اندازه کافی نماینده برای تجزیه و تحلیل‌های بعدی باشد.

## ۷- تعمیم الگوریتم پیشنهادی برای سیستم‌های دومرحله‌ای

در ادامه الگوریتم پیشنهادی را که بر مبنای کارایی متقاطع ساخته شده را بسط داده و با محاسبه کارایی متقاطع در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای معرفی شده توسط کاثو و لیو [۱۶]، مدل (۱۱) می‌توان تخصیص هزینه را برای سیستم‌هایی که دارای ساختار دومرحله‌ای هستند نیز اختصاص داد.

مثال ۵-داده‌ها برگرفته از مقاله کاثو و هانگ [۱۸] یک مدل دومرحله‌ای برای اندازه‌گیری کارایی شرکت بیمه در تایوان می‌باشد و داده‌های ورودی، میانی و خروجی در جدول ۱۱ آورده شده است. این سیستم دومرحله‌ای دارای ساختار سری می‌باشد کل عملیات فرایند کسب حق بیمه در بخش اول و فرایند تولید سود در بخش دوم قرار دارد. شاخص‌های ورودی و خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$x_1$ : هزینه عملیاتی.

$x_2$ : هزینه بیمه.

$y_1$ : سود پذیره‌نویسی.

$y_2$ : سود سرمایه‌گذاری.

$z_1$ : حق بیمه دریافتی از مشتریان بیمه شده.

$z_2$ : حق بیمه دریافتی از شرکت‌های واگذارنده.

جدول ۱۱- داده‌های ورودی و خروجی مثال ۵.

Table 11- Input and output data of example 4.

DMU	$x_1$	$x_2$	$z_1$	$z_2$	$y_1$	$y_2$
1	1178744	673512	7451757	856735	984143	681687
2	1381822	1352755	10020274	1812894	1228502	834754
3	1177494	592790	4776548	560244	293613	658428
4	601320	594259	3174851	371863	248709	177331
5	6699063	3531614	37392862	1753794	7851229	3925272
6	2627707	668363	9747908	952326	1713598	415058
7	1942833	1443100	10685457	643412	2239593	439039
8	3789001	1873530	17267266	1134600	3899530	622868
9	1567746	950432	11473162	546337	1043778	264098
10	1303249	1298470	8210389	504528	1697941	554806
11	1962448	672414	7222378	643178	1486014	18259
12	2592790	650952	9434406	1118489	1574191	909295
13	2609941	1368802	13921464	811343	3609236	223047
14	1396002	988888	7396396	465509	1401200	332283
15	2184944	651063	10422297	749893	3355197	555482
16	1211716	415071	5606013	402881	854054	197947
17	1453797	1085019	7695461	342489	3144484	371984
18	757515	547997	3631484	995620	692731	163927
19	159442	182338	1141950	483291	519121	46857
20	145442	53518	316829	131920	355624	26537
21	84171	26224	225888	40542	51950	6491
22	15993	10502	52063	14574	82141	4181
23	163297	28408	245910	49864	0.1	18980
24	1544215	235094	476419	644816	142370	16976

همان طور که در جدول ۱۲ تا جدول ۱۴ مشاهده می‌کنید در ابتدا پس از محاسبه وزن‌های بهینه ( $v_1, v_2, w_1, w_2, u_1, u_2$ ) برای هر ۲۴ تا  $DMU$  جدول کارایی متقاطع را برای مرحله اول، مرحله دوم و کل سیستم محاسبه می‌کنیم، به عنوان مثال مقادیر سطرهای جدول ۶ تا جدول ۸ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$F_1 = \frac{u_1 y_{i1} + (u_2 y_{i2})}{v_1 x_{i1} + (v_2 x_{i2})}, F_2 = \frac{w_1 z_{i1} + (w_2 z_{i2})}{v_1 x_{i1} + (v_2 x_{i2})}, F_3 = \frac{u_1 y_{i1} + (u_2 y_{i2})}{w_1 z_{i1} + (w_2 z_{i2})} \quad i = 1, \dots, 24,$$

و درنهایت الگوریتم پیشنهادی را بر روی این داده‌های جدول کارایی متقاطع پیاده‌سازی می‌کنیم. با مشاهده آخرین عدد در ستون و سطر آخر هر ۳ جدول می‌بینیم که مجموع سهم تمام  $DMUs$  عدد یک می‌شود و می‌توان چنین برداشت کرد که سهم هر واحد تحت ارزیابی از یک واحد چقدر است و با توجه به اینکه این سهم به نسبت، بر اساس وزن‌های ورودی و خروجی به هر واحد تخصیص یافته است می‌توان امیدوار شد که تخصیص عادلانه‌ای به هر  $DMU$  اختصاص یافته است. به عنوان مثال در ستون  $B$  سطر ۱۹، سهم اختصاص یافته به  $DMU_1$  را در هر ۳ جدول می‌توان مشاهده کرد. جدول ۱۲ بر اساس وزن‌های خروجی مرحله دوم به ورودی‌های مرحله اول می‌باشد به اصلاح می‌توان گفت مانند یک جعبه سیاه عمل می‌کند و وزن‌های میانی را در نظر نمی‌گیرد؛ بنابراین تخصیص هزینه بر اساس ورودی اولیه و خروجی نهایی در جدول ۱۲ قابل مشاهده است. جدول ۱۳ و جدول ۱۴ به یکدیگر وابسته هستند و می‌توان تخصیص هزینه را بر اساس دیدگاه مدل‌های مشارکتی و غیر مشارکتی را بر اساس وزن‌های خروجی مرحله دوم به ورودی میانی و خروجی میانی به وزن‌های ورودی اولیه در نظر گرفت. با توجه به معادله زیر می‌باشد:

$$\sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R, \quad R_j^1, R_j^2 \geq 0,$$

باید مجموع هزینه اختصاص داده شده مرحله اول و مرحله دوم برابر مقدار  $R$  باشد؛ بنابراین  $R = \alpha R_j^1 + (1 - \alpha) R_j^2$

به عنوان مثال اگر به سیستم شبکه‌ای از دیدگاه مشارکتی نگاه کنیم مقدار  $\alpha = 0.5$  در مرحله گرفته و سهم هر  $DMU$  در هر مرحله را حساب می‌کنیم. همچنین اگر بخواهیم از دیدگاه غیر مشارکتی به سیستم دو مرحله‌ای نگاه کنیم و مرحله اول را لیدر در نظر بگیریم هر اندازه مقدار  $\alpha$  کوچک‌تر باشد، هزینه ثابت اعمال شده به لیدر کمتر خواهد بود و سهم فالور از این هزینه ثابت بیشتر خواهد بود و بالعکس اگر مرحله دوم را لیدر در نظر بگیریم هر چه مقدار  $\alpha$  بزرگ‌تر باشد هزینه ثابت کمتری به فالور تحمیل می‌شود و در این حالت به نفع فالور خواهد بود.

فرض کیم میزان هزینه تخصیص یافته مقدار  $10^0$  واحد باشد در این صورت سهم  $DMU_1$  برای حالتی که سیستم را مانند جعبه سیاه در نظر بگیریم  
بر اساس جدول ۱۱ برابر است با

$$R^1 = 0.05741 \times 100 = 5.741.$$

همچنین هزینه ثابت تخصیص یافته به  $DMU_1$  در حالت مشارکتی بر اساس جدول ۱۲ و جدول ۱۳ با مقدار  $\alpha = 0.5$  برابر است با

$$R_1^1 = 0.5 \times 0.05515 \times 100 = 2.757, \quad R_1^2 = 0.5 \times 0.04431 \times 100 = 2.21, \quad R_1^K = 2.757 + 2.21 = 4.967.$$

جدول ۱۲- کارگردانی مقاطعه براساس وزن‌های مدل (۱۱۵) و تخصیص هزینه براساس دیدگاه جمعیه سپاه.

شعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
1	0.70	0.51	0.72	0.24	0.77	0.33	0.28	0.27	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.30	0.36	0.26	0.33	0.47	0.18	0.57	0.41	0.09
2	0.60	0.63	0.58	0.30	0.62	0.18	0.27	0.20	0.19	0.47	0.04	0.37	0.14	0.27	0.31	0.19	0.34	0.25	0.42	0.27	0.10	0.46	0.34	0.14
3	0.70	0.51	0.72	0.24	0.76	0.33	0.28	0.27	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.54	0.30	0.36	0.26	0.33	0.47	0.18	0.57	0.41	0.09
4	0.60	0.62	0.58	0.30	0.62	0.18	0.26	0.20	0.19	0.46	0.04	0.37	0.13	0.27	0.30	0.19	0.33	0.25	0.41	0.27	0.10	0.44	0.34	0.13
5	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.47	0.18	0.58	0.41	0.09
6	0.56	0.35	0.59	0.17	0.64	0.39	0.21	0.24	0.18	0.26	0.09	0.76	0.18	0.22	0.60	0.31	0.28	0.20	0.24	0.48	0.19	0.49	0.33	0.06
7	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.47	0.18	0.58	0.41	0.09
8	0.66	0.45	0.68	0.21	0.74	0.37	0.26	0.27	0.21	0.34	0.09	0.72	0.20	0.27	0.60	0.32	0.34	0.24	0.31	0.51	0.19	0.58	0.39	0.08
9	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.39	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.48	0.18	0.59	0.41	0.09
10	0.60	0.63	0.58	0.30	0.62	0.18	0.27	0.20	0.19	0.47	0.04	0.37	0.14	0.27	0.31	0.19	0.34	0.25	0.42	0.27	0.10	0.46	0.34	0.14
11	0.11	0.07	0.04	0.03	0.17	0.19	0.12	0.16	0.08	0.10	0.17	0.18	0.20	0.11	0.39	0.15	0.22	0.09	0.21	0.50	0.15	0.59	0.00	0.05
12	0.56	0.35	0.60	0.17	0.64	0.39	0.21	0.24	0.18	0.26	0.09	0.76	0.18	0.22	0.60	0.31	0.28	0.20	0.24	0.48	0.19	0.49	0.33	0.06
13	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.60	0.34	0.07
14	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.39	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.48	0.18	0.59	0.41	0.09
15	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.59	0.34	0.07
16	0.66	0.45	0.68	0.22	0.74	0.37	0.26	0.28	0.21	0.34	0.10	0.72	0.21	0.27	0.60	0.32	0.35	0.24	0.31	0.52	0.19	0.59	0.39	0.08
17	0.12	0.09	0.04	0.15	0.09	0.09	0.10	0.06	0.09	0.07	0.12	0.11	0.08	0.19	0.09	0.15	0.07	0.16	0.24	0.07	0.35	0.04	0.04	
18	0.70	0.51	0.72	0.24	0.77	0.33	0.28	0.27	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.30	0.36	0.26	0.33	0.47	0.18	0.58	0.41	0.09
19	0.60	0.62	0.58	0.30	0.62	0.18	0.26	0.20	0.19	0.46	0.04	0.37	0.13	0.27	0.31	0.19	0.33	0.25	0.41	0.27	0.10	0.45	0.34	0.13
20	0.43	0.26	0.42	0.13	0.51	0.36	0.19	0.23	0.16	0.22	0.14	0.62	0.21	0.20	0.59	0.28	0.28	0.17	0.25	0.55	0.20	0.59	0.23	0.06
21	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.59	0.34	0.07
22	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.59	0.34	0.07
23	0.66	0.48	0.72	0.23	0.71	0.28	0.22	0.21	0.19	0.33	0.01	0.62	0.10	0.24	0.41	0.25	0.25	0.21	0.21	0.27	0.12	0.27	0.42	0.06
24	0.60	0.62	0.58	0.30	0.62	0.18	0.26	0.20	0.19	0.46	0.04	0.37	0.13	0.27	0.31	0.19	0.33	0.25	0.41	0.27	0.10	0.45	0.34	0.13
MIN/SUM	0.05	0.03	0.02	0.01	0.06	0.04	0.04	0.03	0.04	0.01	0.05	0.04	0.03	0.08	0.04	0.06	0.03	0.06	0.10	0.03	0.11	0.00	0.02	
MAX/SUM	0.07	0.06	0.07	0.03	0.08	0.04	0.03	0.02	0.05	0.02	0.08	0.02	0.03	0.06	0.03	0.04	0.03	0.06	0.02	0.06	0.04	0.01	0.01	
Average	0.06	0.05	0.04	0.02	0.07	0.04	0.03	0.03	0.02	0.04	0.01	0.06	0.03	0.03	0.07	0.03	0.05	0.03	0.08	0.03	0.09	0.02	0.01	
f=100%P	5.74	4.51	4.34	2.16	6.96	3.89	3.18	3.36	2.38	4.24	1.12	6.32	3.17	3.14	6.95	3.41	4.84	2.82	5.29	7.66	2.45	8.60	2.09	1.43

جدول ۱۳- کارایی متقاطع بر اساس وزن‌های مدل (۱۴) و تخصیص هزینه مرحله اول.

Table 13- Cross efficiency based on model weights (14) and first stage cost allocation.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵
F2=w/v	0.99	0.86	0.69	0.57	0.83	0.87	0.67	0.72	1.00	0.62	0.74	0.88	0.81	0.67	1.00	0.91	0.63	0.79	1.00	0.63	0.64	0.58	0.84	0.65	
0.86	0.99	0.55	0.72	0.76	0.51	0.75	0.62	1.00	0.86	0.50	0.50	0.73	0.72	0.65	0.63	0.72	0.66	0.99	0.30	0.37	0.45	0.62	0.42		
0.99	0.86	0.69	0.57	0.83	0.87	0.67	0.72	0.72	1.00	0.62	0.74	0.88	0.81	0.67	1.00	0.91	0.63	0.79	1.00	0.63	0.64	0.58	0.84	0.65	
0.86	0.99	0.55	0.72	0.76	0.50	0.75	0.62	0.99	0.85	0.50	0.49	0.72	0.72	0.65	0.63	0.72	0.66	0.99	0.30	0.37	0.45	0.61	0.42		
1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.67	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.65	0.58	0.85	0.66		
0.78	0.60	0.57	0.38	0.63	0.95	0.46	0.57	0.72	0.39	0.70	0.99	0.62	0.47	0.99	0.84	0.42	0.63	0.75	0.69	0.68	0.48	0.72	0.55		
0.99	0.86	0.69	0.57	0.83	0.86	0.67	0.72	1.00	0.62	0.74	0.88	0.81	0.67	1.00	0.90	0.62	0.79	1.00	0.63	0.64	0.58	0.84	0.66		
0.92	0.78	0.66	0.50	0.74	0.91	0.57	0.66	0.87	0.52	0.73	0.94	0.73	0.58	1.00	0.88	0.53	0.79	1.00	0.73	0.69	0.58	0.84	0.74		
1.00	0.87	0.70	0.58	0.84	0.88	0.68	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.68	1.01	0.92	0.64	0.80	1.01	0.63	0.65	0.58	0.85	0.66		
0.86	0.99	0.55	0.72	0.76	0.51	0.75	0.62	1.00	0.86	0.50	0.50	0.73	0.72	0.65	0.63	0.72	0.66	0.99	0.30	0.37	0.45	0.62	0.42		
0.76	0.66	0.56	0.37	0.51	0.93	0.39	0.50	0.59	0.33	0.66	1.01	0.53	0.40	0.90	0.76	0.34	0.77	1.01	0.94	0.76	0.59	0.82	0.89		
0.78	0.60	0.57	0.38	0.63	0.95	0.46	0.57	0.72	0.39	0.70	0.99	0.62	0.47	0.99	0.84	0.42	0.64	0.75	0.69	0.68	0.48	0.73	0.55		
0.89	0.74	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.73	1.00	0.68	0.52	1.01	0.87	0.47	0.79	1.00	0.82	0.73	0.59	0.85	0.79		
0.98	0.68	0.57	0.82	0.86	0.66	0.72	0.99	0.62	0.73	0.87	0.80	0.66	0.99	0.90	0.62	0.79	0.99	0.62	0.64	0.57	0.83	0.65			
0.89	0.75	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.74	1.01	0.68	0.53	1.01	0.88	0.47	0.79	1.00	0.82	0.74	0.59	0.86	0.79		
0.94	0.79	0.66	0.50	0.75	0.92	0.58	0.67	0.88	0.52	0.74	0.95	0.74	0.59	1.01	0.90	0.54	0.80	1.01	0.74	0.70	0.59	0.86	0.75		
1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.68	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.68	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.64	0.58	0.85	0.65		
1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.68	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.65	0.58	0.85	0.66		
0.92	1.09	0.59	0.77	0.78	0.53	0.78	0.64	1.02	0.89	0.53	0.53	0.75	0.75	0.68	0.66	0.74	0.75	1.20	0.36	0.40	0.51	0.68	0.69		
0.75	0.65	0.55	0.37	0.50	0.92	0.38	0.49	0.58	0.33	0.65	1.00	0.52	0.39	0.88	0.74	0.33	0.76	1.00	0.93	0.75	0.58	0.81	0.88		
1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.68	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.65	0.58	0.85	0.66		
0.89	0.74	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.73	1.01	0.68	0.52	1.01	0.88	0.47	0.79	1.00	0.82	0.74	0.59	0.86	0.79		
0.89	0.74	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.73	1.01	0.68	0.52	1.01	0.88	0.47	0.79	1.00	0.82	0.74	0.59	0.86	0.79		
1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.67	0.73	1.01	0.63	0.74	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.64	0.58	0.85	0.65		
0.87	1.00	0.56	0.73	0.76	0.51	0.75	0.62	1.00	0.86	0.50	0.50	0.73	0.73	0.65	0.63	0.72	0.66	1.00	0.30	0.37	0.45	0.62	0.43		
MIN	0.75	0.60	0.55	0.37	0.50	0.50	0.38	0.49	0.58	0.33	0.50	0.49	0.52	0.39	0.65	0.63	0.33	0.63	0.75	0.30	0.37	0.45	0.61	0.42	
MAX	1.00	1.09	0.70	0.77	0.84	0.96	0.78	0.73	1.02	0.89	0.75	1.01	0.82	0.75	1.01	0.92	0.74	0.80	1.20	0.94	0.76	0.59	0.86	0.89	
MIN/SUM	0.06	0.05	0.03	0.04	0.04	0.03	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.03	0.05	0.05	0.03	0.05	0.06	0.02	0.03	0.04	0.05	0.03	0.03	0.03	
MAX/SUM	0.05	0.05	0.03	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.06	0.05	0.04	0.03	0.04	0.04		
Average	0.06	0.05	0.04	0.03	0.04	0.04	0.03	0.04	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.03	0.05	0.05	0.06	0.03	0.03	0.03	0.05	0.04	0.04		
f=100*p	5.52	5.10	3.95	3.35	4.11	4.38	3.44	3.79	4.85	3.49	3.86	4.48	4.12	3.42	5.10	4.80	3.15	4.54	6.00	3.50	3.33	3.27	4.59	3.88	

## جدول ۱۴- کارگردانی متابع اساسی وزن‌های مدل (۱۴) و تخصیص وزن‌های مرحله‌های

Table 14- Cross efficiency based on model weights (14) and second stage cost allocation.

شعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
1	0.70	0.59	1.04	0.43	0.92	0.39	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.75	0.24	0.43	0.55	0.34	0.57	0.33	0.74	0.27	1.00	0.49	0.14	
2	0.69	0.63	1.05	0.42	0.82	0.36	0.36	0.32	0.19	0.55	0.08	0.74	0.19	0.38	0.48	0.30	0.47	0.38	0.42	0.91	0.27	1.02	0.55	0.32
3	0.70	0.59	1.04	0.43	0.92	0.38	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.75	0.24	0.43	0.55	0.33	0.57	0.33	0.74	0.27	0.99	0.49	0.14	
4	0.69	0.63	1.05	0.42	0.82	0.35	0.35	0.32	0.19	0.54	0.07	0.74	0.19	0.38	0.47	0.30	0.46	0.37	0.41	0.89	0.27	0.99	0.55	0.32
5	0.70	0.59	1.04	0.43	0.92	0.39	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.75	0.24	0.43	0.55	0.33	0.57	0.33	0.74	0.27	1.00	0.48	0.14	
6	0.72	0.57	1.05	0.44	1.01	0.41	0.46	0.42	0.25	0.67	0.13	0.77	0.29	0.48	0.61	0.37	0.66	0.31	0.70	0.28	1.02	0.46	0.11	
7	0.71	0.59	1.05	0.43	0.93	0.39	0.42	0.38	0.23	0.62	0.11	0.75	0.25	0.43	0.55	0.34	0.58	0.33	0.75	0.28	1.01	0.49	0.14	
8	0.71	0.57	1.04	0.43	1.00	0.41	0.45	0.41	0.25	0.66	0.13	0.76	0.28	0.47	0.60	0.36	0.65	0.31	0.69	0.28	1.00	0.46	0.11	
9	0.70	0.58	1.03	0.42	0.92	0.38	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.74	0.24	0.43	0.55	0.33	0.57	0.33	0.74	0.28	1.01	0.48	0.14	
10	0.69	0.63	1.05	0.42	0.82	0.36	0.36	0.32	0.19	0.55	0.08	0.74	0.19	0.38	0.48	0.30	0.47	0.38	0.42	0.91	0.27	1.02	0.55	0.32
11	0.14	0.10	0.07	0.08	0.32	0.21	0.30	0.31	0.14	0.29	0.25	0.18	0.37	0.27	0.43	0.20	0.64	0.12	0.21	0.53	0.20	1.00	0.00	0.05
12	0.72	0.57	1.05	0.44	1.01	0.41	0.46	0.42	0.25	0.67	0.13	0.77	0.29	0.48	0.61	0.37	0.66	0.31	0.70	0.28	1.02	0.46	0.11	
13	0.67	0.52	0.96	0.41	1.00	0.40	0.46	0.43	0.25	0.66	0.15	0.72	0.31	0.47	0.61	0.36	0.70	0.28	0.29	0.66	0.27	1.01	0.40	0.09
14	0.71	0.59	1.05	0.43	0.94	0.39	0.42	0.39	0.23	0.62	0.11	0.76	0.25	0.44	0.56	0.34	0.59	0.33	0.74	0.28	1.02	0.49	0.14	
15	0.67	0.51	0.96	0.40	0.99	0.40	0.46	0.43	0.25	0.66	0.15	0.71	0.31	0.47	0.61	0.36	0.70	0.28	0.29	0.66	0.27	1.00	0.40	0.09
16	0.71	0.56	1.03	0.43	0.99	0.40	0.45	0.41	0.24	0.66	0.13	0.75	0.28	0.46	0.59	0.36	0.65	0.31	0.70	0.28	1.00	0.45	0.11	
17	0.12	0.10	0.13	0.07	0.18	0.11	0.13	0.06	0.05	0.09	0.14	0.13	0.12	0.19	0.10	0.23	0.09	0.16	0.38	0.11	0.59	0.05	0.06	
18	0.70	0.58	1.03	0.42	0.92	0.38	0.41	0.37	0.22	0.61	0.11	0.74	0.24	0.43	0.54	0.33	0.57	0.32	0.33	0.74	0.27	0.99	0.48	0.14
19	0.65	0.57	0.98	0.40	0.79	0.33	0.34	0.31	0.18	0.52	0.07	0.69	0.18	0.36	0.45	0.28	0.45	0.33	0.34	0.74	0.24	0.87	0.50	0.19
20	0.57	0.41	0.77	0.34	1.00	0.39	0.50	0.47	0.27	0.67	0.21	0.62	0.40	0.50	0.67	0.38	0.85	0.23	0.25	0.59	0.26	1.01	0.28	0.07
21	0.67	0.52	0.96	0.40	0.99	0.40	0.46	0.43	0.25	0.66	0.15	0.71	0.31	0.47	0.61	0.36	0.70	0.28	0.29	0.66	0.27	1.00	0.40	0.09
22	0.69	0.62	1.04	0.42	0.81	0.35	0.35	0.32	0.19	0.54	0.07	0.73	0.18	0.37	0.47	0.29	0.46	0.37	0.41	0.88	0.27	0.99	0.55	0.31
Min/Sum	0.04	0.03	0.02	0.02	0.06	0.03	0.04	0.04	0.02	0.05	0.01	0.04	0.04	0.04	0.06	0.03	0.07	0.03	0.05	0.12	0.03	0.14	0.00	0.02
Max/Sum	0.05	0.05	0.08	0.03	0.07	0.03	0.04	0.03	0.02	0.05	0.02	0.06	0.03	0.04	0.05	0.03	0.07	0.03	0.07	0.07	0.02	0.07	0.04	0.02
Average	0.04	0.04	0.05	0.03	0.06	0.03	0.04	0.04	0.02	0.05	0.01	0.05	0.03	0.04	0.05	0.03	0.07	0.03	0.04	0.09	0.03	0.11	0.02	0.02
f=100	4.43	3.81	4.79	2.68	6.40	3.12	3.77	3.70	1.91	4.65	1.20	4.87	3.35	3.65	5.23	2.82	6.59	2.76	3.87	9.01	2.67	10.83	1.99	1.93

## ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله با ارایه الگوریتمی پیشنهادی و مفاهیم کارایی متقطع بهبودیافته، روش جدیدی برای رتبه‌بندی و تخصیص هزینه برای واحدهای تصمیم‌گیرنده ارایه شده است، هزینه ثابت را به طور عادلانه و منحصربه‌فردی به هر واحد تحت ارزیابی اختصاص می‌دهد. از ویژگی‌های الگوریتم پیشنهادی، قابلیت آن برای تخصیص هزینه در تحلیل پوششی داده‌های سنتی و تحلیل پوششی داده‌های دو یا چند مرحله‌ای، با درنظر گرفتن ورودی و خروجی‌های میانی است. همچنین در روش پیشنهادی تخصیص هزینه به نحوی است که ضمن حفظ کارا بودن واحدهای کارا، موجب بهبود کارایی واحدهای ناکارا نیز می‌شود. با استفاده از جداول کارایی متقطع بهبودیافته و مراحل ساده الگوریتم می‌توان تخصیص هزینه ثابت را بین واحدهای تصمیم‌گیری به طور عادلانه توزیع کرد. از مزیت‌های این رویکرد سهم  $DMU$  از میانگین بیشترین و کمترین مقدار (خوب‌بینانه و بدینانه) وزن‌های  $DMU$  تحت ارزیابی می‌باشد و نیازی به حل دو مدل جداگانه برای محاسبه بیشترین و کمترین مقدار وزن‌ها نیست. نتایج را با ارایه مثال‌های کاربردی واقعی از شعب بانک ایرانی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌ایم.

## منابع

- [1] Cook, W. D., & Kress, M. (1999). Characterizing an equitable allocation of shared costs: a DEA approach. *European journal of operational research*, 119(3), 652–661. DOI:10.1016/S0377-2217(98)00337-3
- [2] Cook, W. D., & Zhu, J. (2005). Allocation of shared costs among decision making units: a DEA approach. *Computers and operations research*, 32(8), 2171–2178. DOI:10.1016/j.cor.2004.02.007
- [3] Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H., Shojai, N., & Sanei, M. (2004). An alternative approach for equitable allocation of shared costs by using DEA. *Applied mathematics and computation*, 153(1), 267–274. DOI:10.1016/S0096-3003(03)00631-3
- [4] Lin, R. (2011). Allocating fixed costs or resources and setting targets via data envelopment analysis. *Applied mathematics and computation*, 217(13), 6349–6358. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.008>
- [5] Beasley, J. E. (2003). Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 147(1), 198–216.
- [6] Li, Y., Yang, M., Chen, Y., Dai, Q., & Liang, L. (2013). Allocating a fixed cost based on data envelopment analysis and satisfaction degree. *Omega (United Kingdom)*, 41(1), 55–60. DOI:10.1016/j.omega.2011.02.008
- [7] Li, F., Zhu, Q., & Chen, Z. (2019). Allocating a fixed cost across the decision making units with two-stage network structures. *Omega (United Kingdom)*, 83, 139–154. DOI:10.1016/j.omega.2018.02.009
- [8] Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European journal of operational research*, 196(3), 1170–1176.
- [9] Chu, J., Wu, J., Chu, C., & Zhang, T. (2020). DEA-based fixed cost allocation in two-stage systems: leader-follower and satisfaction degree bargaining game approaches. *Omega (United Kingdom)*, 94, 102054. DOI:10.1016/j.omega.2019.03.012
- [10] Li, Y., Li, F., Emrouznejad, A., Liang, L., & Xie, Q. (2019). Allocating the fixed cost: an approach based on data envelopment analysis and cooperative game. *Annals of operations research*, 274(1–2), 373–394. DOI:10.1007/s10479-018-2860-9
- [11] Xu, G., Wu, J., & Zhu, Q. (2022). Fixed cost allocation in two-stage system: a data-driven approach from the perspective of fairness concern. *Computers and industrial engineering*, 173, 108647. DOI:10.1016/j.cie.2022.108647
- [12] Khoshandam, L. (2020). Ranking by using improved cross efficiency based on perturbation problem: an application to Iranian commercial banks. *Journal of operational research and its applications*, 17(2), 127–144. (**In Persian**). <http://jamlu.liau.ac.ir/article-1-1889-fa.html>
- [13] Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. *New directions for program evaluation*, 1986(32), 73–105. DOI:10.1002/ev.1441
- [14] Nakabayashi, K., Sahoo, B. K., & Tone, K. (2009). Fair allocation based on two criteria: a DEA game view of “ADD them up and divide by two.” *Journal of the operations research society of japan*, 52(2), 131–146. DOI:10.15807/jorsj.52.131
- [15] Amirteimoori, A., & Kordrostami, S. (2005). Efficient surfaces and an efficiency index in DEA: a constant returns to scale. *Applied mathematics and computation*, 163(2), 683–691. DOI:10.1016/j.amc.2004.04.009
- [16] Kao, C., & Liu, S. T. (2019). Cross efficiency measurement and decomposition in two basic network systems. *Omega (United Kingdom)*, 83, 70–79. DOI:10.1016/j.omega.2018.02.004
- [17] Doyle, J., & Green, R. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA derivations, meanings and uses. *Journal of the operational research society*, 45(5), 567–578. DOI:10.1057/jors.1994.84
- [18] Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: an application to non-life insurance companies in Taiwan. *European journal of operational research*, 185(1), 418–429.